EXERCICE N°1 : 20' 4 points

Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \int_0^{U_n} \dfrac{dx}{3+\sin x} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

1°) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$.

2°) Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{1}{3+\sin x} \leq \dfrac{1}{2}$.

3°) En déduire que pour tout entier naturel n, $0 < U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} U_n$.

4°) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 < U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

EXERCICE N°2 : 20' 4 points

On considère la suite (I_n) définie sur IN^* par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$.

1°) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_n \geq 0$.

b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante.

c) En déduire que (I_n) est une suite convergente.

2°) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (I_n).

3°) Calculer I_2 et I_4.

EXERCICE N°3 : 25' 4 points

On considère les suite (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$I_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$.

1°) a) Montrer que la suite (I_n) est à terme positifs.

b) Etudier la monotonie de la suite (I_n).

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

2°) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3°) a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel $n \in IN^*$,

$I_{n+1} = -(n+1) J_n + \sin(1)$

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn